Thm Chinois : (Cas général)

Soit $(a_j)_{1\leq j\leq r}$ des éléments non nuls et non inversibles de A anneau principal.

$a = \prod_{j=1}^{r} a_j$, et $\pi_j : \begin{cases} A \longrightarrow A/(a_j) \\ x \longmapsto \overline{x} = \pi_j(x) \end{cases}$, si les a_j sont deux à deux premiers entre eux, $\varphi : \begin{cases} A \longrightarrow \prod_{j=1}^{r} A/(a_j) \\ x \longmapsto (\pi_1(x), \dots, \pi_r(x)) \end{cases}$ est un morphisme d'anneaux surjectif

de noyau $\ker \varphi = \prod_{j=1}^{r} a_j$ et φ induit un isomorphisme d'anneaux

$\overline{\varphi} : \begin{cases} A/a \longrightarrow \prod_{j=1}^{r} A/(a_j) \\ \pi(x) \longmapsto (\pi_1(x), \dots, \pi_r(x)) \end{cases}$ où $\pi : \begin{cases} A \longrightarrow A/(a) \\ x \longmapsto \overline{x} \end{cases}$

d'inverse $\overline{\varphi}^{-1} : \begin{cases} \prod_{j=1}^{r} A/(a_j) \longrightarrow A/(a) \\ (\pi_1(x_1), \dots, \pi_r(x_r)) \longmapsto \pi\left(\sum_{i=1}^{r} x_i u_i b_i\right) \end{cases}$ où $\sum_{j=1}^{r} u_j b_j = 1$

Preuve :

- On vérifie bien que $\varphi : \begin{cases} A \longrightarrow \prod_{j=1}^{r} A/(a_j) \\ x \longmapsto (\pi_1(x), \dots, \pi_r(x)) \end{cases}$ est un morphisme d'anneaux

  Le noyau de φ est formé de tous les éléments multiples de tous les a_j donc de leur ppcm $a = \prod_{j=1}^{r} a_j$ puisque les a_j sont 2 à 2 premiers entre eux.

- Les $b_j = \frac{a}{a_j}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. En effet s'ils ne l'étaient pas il existe dans un élément premier p de A qui divise tous les b_i car l'anneau A est factoriel car principal. Comme $p | b_1 = \prod_{i=2}^{r} a_i$ il divise a_i pour $2 \leq i \leq r$ mais divisant b_i, il divise a_k pour $1 \leq k \neq i \leq r$ ce qui contredit le fait que a_i et a_k sont premiers entre eux.

  De ce fait on en déduit que par le théorème de Bezout qu'il existe une suite $(u_i)_{1\leq i\leq r}$ de A telle que $\sum_{i=1}^{r} u_i b_i = 1$.

Pour $1 \leq j \leq r$, $\pi_j(b_i) = \pi_j\left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} a_k\right) = \pi_j(0)$ pour $i \neq j$ puisque b_i est multiple de a_j, ce qui donne $\pi_j(1) = \pi_j\left(\sum_{i=1}^{r} u_i b_i\right) = \pi_j(u_j)\pi_j(b_j)$

Donc $\pi_j(b_j)$ est inversible dans $A/(a_j)$ d'inverse $\pi_j(u_j)$.

- Pour $(\pi_j(x_j))_{1 \leq j \leq r}$ donné dans $\prod_{j=1}^{r} A/(a_j)$, en posant $x = \sum_{i=1}^{r} x_i u_i b_i$

On a $\pi_j(x) = \pi_j(x_j)\pi_j(u_j)\pi_j(b_j) = \pi_j(x_j)$ $\forall j, 1 \leq j \leq r$

Soit $\varphi(x) = (\pi_j(x_j))_{1 \leq j \leq r}$ qui est donc surjectif.

Et il se factorise en un isomorphisme $\bar{\varphi} = \begin{cases} A/\ker\varphi \longrightarrow \prod_{j=1}^{r} A/(a_j) \\ \pi(x) \longmapsto (\pi_j(x))_{1 \leq j \leq r} \end{cases}$

On a également montré avec la surjectivité que $\bar{\varphi}^{-1} \begin{cases} \prod_{j=1}^{r} A/(a_j) \longrightarrow A/\ker\varphi \\ (\pi_j(x_j)) \longmapsto \pi\left(\sum_{i=1}^{r} x_i u_i b_i\right) \end{cases}$

□

<u>Appli :</u> On considère le syst $\begin{cases} x \equiv 2\ [4] \\ x \equiv 3\ [5] \\ x \equiv 1\ [9] \end{cases}$

On a $a_1 = 4$; $a_2 = 5$; $a_3 = 9$ qui sont 2 à 2 premiers entre eux, ce système a des solutions données en déterminant des coefficients dans une relation de Bézout $u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3 = 1$ à $b_1 = a_2 a_3 = 45$; $b_2 = a_1 a_3 = 36$; $b_3 = a_1 a_2 = 20$

Par associativité du pgcd on a $\begin{cases} b_2 \wedge b_3 = 4 = (-1)\cdot 36 + 2\cdot 20 \\ b_1 \wedge (b_2 \wedge b_3) = 1 = 1\cdot 45 + (-11)\cdot 4 \\ 1 = 1\cdot 45 + 11\cdot 36 + (-22)\cdot 20 \end{cases}$

D'où la sol° particulière $x_0 = 2\cdot 45 + 33\cdot 36 - 22\cdot 20 = 838$ et la sol° générale est $x = 838 + \underbrace{180}_{4\cdot 5\cdot 9 = a_1 a_2 a_3} q = 118 + 180 q'$

$\Rightarrow S\begin{pmatrix} x \equiv 2[4] \\ x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[9] \end{pmatrix} = 118 + 180\mathbb{Z}$

□